

Trabajo monográfico en el marco de:

3rd EL LEONCITO SCHOOL OF SOLAR PHYSICS



Docente evaluador:
Dr. José Ignacio Castro

Título:

Turbulencia MHD: Regímenes de Relajación.

Adriana Maria Gulisano

DNI: 20510376



Turbulencia MHD: Regímenes de relajación

Resumen:

En la primera parte de ésta monografía se revisarán conceptos generales acerca de la turbulencia en el marco de la teoría magnetohidrodinámica ideal, y los regímenes de relajación que pueden encontrarse.

En la segunda parte se mostrarán posibles casos de decaimiento selectivo en nubes magnéticas interplanetarias.

Turbulencia MHD algunos conceptos generales:

El estado dinámico de turbulencia está caracterizado por un contenido de energía por unidad de volumen del orden de $E \approx V_0^2 \approx B_0^2$ (velocidad típica al cuadrado, campo magnético típico al cuadrado), la tasa de disipación de energía $\varepsilon = -dE/dt$, (que iguala a la tasa de inyección de energía en turbulencia estacionaria) y por los coeficientes de disipación ν y η .

Dado que una velocidad típica está dada por $E^{1/2}$ y que una escala característica global se define como: $L = E^{3/2}/\varepsilon$ tal que $R_e = E^2/\nu\varepsilon$ y $R_m = E^2/\eta\varepsilon$, considerando que $R_e \approx R_m$.

Los sistemas turbulentos sólo pueden ser descriptos por medios estadísticos, si el teorema ergódico es válido al menos en algún sentido débil, y si el tamaño del sistema es grande en comparación con las escalas turbulentas dominantes los promedios espaciales y los promedios temporales, que son los que se miden usualmente experimentalmente pueden ser identificados con promedios del conjunto estadístico.

Globalmente, la turbulencia es en general inhomogénea, siendo forzada por el gradiente de alguna cantidad como la densidad de corriente, la velocidad, la temperatura, etc.

De hecho la escala de longitud del gradiente es la tomada usualmente en la práctica como la escala de longitud global L en la definición del número de Reynolds. En una sección pequeña del cuerpo de la región turbulenta lejos de los bordes, las variaciones de las cantidades promediadas son pequeñas, y ese subsistema puede considerárselo homogéneo en un sentido estadístico.

Las propiedades de sistemas ideales no disipativos en turbulencia homogénea con sus invariantes y distribuciones de equilibrio aunque son muy diferentes de la turbulencia real que están constituidos por sistemas forzados con disipación, las distribuciones de equilibrio proveen valiosas indicaciones acerca de los procesos de interacción no lineal, es decir de las direcciones de cascadas que pueden esperarse en los sistemas reales.

Los fluidos turbulentos de alto número de Reynolds presentan como característica un espectro de energía inercial donde el rango inercial está definido por $k_{in} \ll k \ll k_d$, donde k_{in} representa el rango de inyección en las grandes escalas donde ocurre la excitación turbulenta y la que acarrea la mayor parte de la energía turbulenta y k_d es el rango de disipación, presenta en las

escalas más pequeñas, pero un rango inercial sólo existe si hay un cociente k_d/k_{in} lo suficientemente grande como para ser distinguible.

Si la transferencia de energía turbulenta se caracteriza por un proceso local de cascada en el espacio k , lo que implica que las interacciones entre números de ondas muy dispares son débiles, la dinámica de los modos en el rango inercial se espera que muestre un comportamiento autosimilar. La dinámica espectral de la energía está determinada por la tasa de inyección ε_{in} a $k \approx k_{in}$, la tasa de transferencia de energía o flujo de energía ε_t en el rango inercial y la tasa de disipación de energía ε_d en $k \approx k_d$, en el caso de turbulencia estacionaria se tiene $\varepsilon_{in} = \varepsilon_t = \varepsilon_d = \varepsilon$, la relación también se mantiene cuando las tasas de inyección varían en el tiempo como en el caso de turbulencia que decae, ya que la dinámica rápida de la pequeña escala en el rango inercial y de disipación se ajusta cuasi-instantáneamente a los cambios más lentos de las escalas que acarrear energía.

Auto-organización y cascadas:

La auto-organización es un aspecto importante en turbulencia MHD, está íntimamente ligada con la disipación selectiva de *invariantes ideales*, (esto es, con las diferencias en las tasas de disipación) conduciendo a configuraciones de gran escala cuasi-estáticas y a estados alineados de $\mathbf{V} // \mathbf{B}$. Los invariantes ideales, en MHD si el sistema no está siendo forzado (cuando la resistividad y la viscosidad pueden despreciarse, MHD ideal) son la energía total, E , la helicidad H y la helicidad cruzada K :

$$\frac{dE}{dt} = - \int dV (\nu |\vec{\omega}|^2 + \eta |\vec{J}|^2)$$

tiene disipación con signo definido, por ello cuando se hace un tratamiento variacional resulta ser la variable a minimizarse, disipa por efecto viscoso y por efecto joule.

$$\frac{dH}{dt} = -\eta \int dV \vec{J} \cdot \vec{B}$$

$$\frac{dK}{dt} = -(\eta + \nu) \int dV \vec{J} \cdot \vec{\omega}$$

Diferentes tasas de disipación llamada *disipación selectiva*, surgen debido a que los términos disipativos contienen distintos órdenes de derivadas espaciales y también porque algunos son definidos negativos y otros no. Si la Helicidad $H \neq 0$, entonces comparando las expresiones para la tasa de decaimiento de E y H se obtiene que $dtH/H \ll dtE/E$ y existen buenos argumentos para suponer que H_k exhibe una cascada inversa, y se concentra cada vez más en números de onda pequeños. (En el espacio de fourier, si por ejemplo se hace la descomposición del potencial

vector de la siguiente manera: $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{A}(\vec{k}) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3k$, la energía va como

$\sim k^2 A^*(k)^2$ donde $A^*(k)$ es el coeficiente de la descomposición de fourier del potencial vector $A(x)$, mientras que en el espacio de fourier la helicidad va como $\sim k A^*(k)$, y puesto que el término difusivo de la ecuación de inducción va como $\sim \eta \nabla^2 B$ y en el espacio de fourier el operador va como $\nabla^2 B(x) \sim k^2 B(k)$ los modos con número de onda más altos serán los más afectados por el término resistivo de difusión y éstos modos afectarán más el decaimiento resistivo de la energía que el decaimiento de la helicidad). Se espera que el sistema relaje a un estado de energía mínimo con la restricción de que la Helicidad magnética se mantenga constante, según la *hipótesis de Taylor* (1974).

En Turbulencia homogénea las funciones de correlación a dos puntos son independientes de x .

$C_{ij}(r) = \langle V_i(x)V_j(x+R) \rangle$ y ya que ese sistema cuasi homogéneo es abierto, se consideran condiciones de contorno periódicas y las cantidades fluctuantes pueden escribirse en representación de fourier. Mientras que los términos disipativos se vuelven muy simples en el espacio k de fourier, $\nabla^2 f \rightarrow -k^2 f_k$, los términos no lineales se vuelven más complicados:

$$f(x)g(x) \rightarrow \sum_k f_{k-k} g_k.$$

Los términos no lineales son los dominantes siendo mayores que los disipativos por un factor del orden del número de Reynolds. La dinámica turbulenta se considera como un proceso de transferencia de ciertas cantidades como la energía o la helicidad, entre diferentes escalas, la representación de fourier directamente conduce a las densidades espectrales correspondientes.

Se obtiene información importante acerca de la dinámica turbulenta considerando los invariantes ideales y las correspondientes propiedades estadísticas de equilibrio. Cuando las series de fourier son truncadas tomando la discretización $\sum_k \rightarrow \sum_k'$ donde la prima indica suma sobre todos los k con $k_{min} \leq k \leq k_{max}$. En general los invariantes ideales en el continuo no son invariantes estrictos en el sistema truncado. Los invariantes cuadráticos sin embargo y presumiblemente sólo ellos, son lo suficientemente robustos como para sobrevivir al truncado. Los invariantes ideales son conservados en las interacciones no lineales, sus componentes espectrales siguen relaciones de balance detallado. Si una cantidad es excitada o inyectada, en un cierto rango espectral $k \approx k_{in}$, se propagará en otras regiones del espacio k , y puesto que las interacciones entre 3 vectores de onda son más fuertes entre k_i 's de la misma magnitud

$|k_i - k_j| = \Delta k \leq k_i$, la transferencia en el espacio k ocurre relativamente de a pequeños pasos, tal que se requieren muchos pasos desde la escala de la zona de inyección $1/k_{in}$ hacia la de disipación de pequeña escala $1/k_d$. Por lo tanto el proceso de transferencia de una cantidad conservada se llama **cascada**.

En un sistema disipativo real ocurren dos casos extremos: a) una cascada normal directa corresponde a un flujo desde k_{in} hacia mayores números de onda hasta k_d . b) una cascada inversa la transferencia es desde k_{in} hacia menores números de onda, lo cual lleva en los casos de un sistema de tamaño finito a la eventual acumulación en el k más pequeño posible y puesto que a grandes longitudes de onda no hay disipación esto impide que se alcance un estado estacionario.

Para MHD las energías de equilibrio están esencialmente equiparticionadas para k altos, eso indica una tendencia de la energía a fluir hacia k grandes, o sea cascada directa., la helicidad magnética en 3 dimensiones tiene una distribución de equilibrio fuertemente picada a bajos k , y puesto que es una cantidad conservada por las interacciones no lineales, se espera observar una cascada inversa hacia pequeños k desde el rango intermedio de inyección k_{in} .

Para turbulencia forzada la cascada inversa de Hk se ha mostrado por solución numérica de las ecuaciones de clausura EDQNM (Pouquet et al., 1976; Pouquet, 1978).

Esta tendencia a auto-organización, es decir a la formación de estructuras de gran escala espacialmente coherentes, en estados de turbulencia que relajan o decaen, se relacionan al fenómeno de **decaimiento selectivo**, mientras que en turbulencia forzada da lugar al efecto de dínamo. Puesto que los campos magnéticos de gran escala que se encuentran en muchos sistemas astrofísicos son esencialmente libres de fuerza, la formación de estas estructuras se asocia con un progresivo alineamiento del campo magnético y la densidad de corriente, $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \rightarrow 0$.

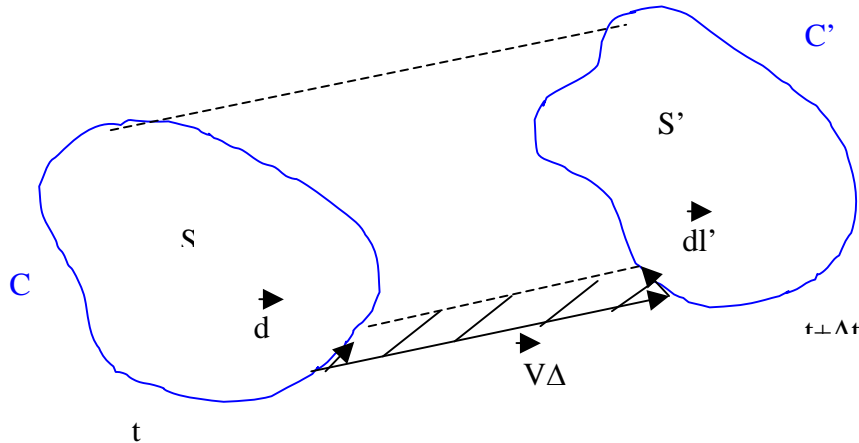
Congelado de las líneas de campo magnético al magneto fluido:

En un plasma altamente conductor (cuando puede considerarse la resistividad prácticamente nula), se observa lo que se ha dado en llamar el **“congelado “ de las líneas de campo magnético al magneto-fluido**, esto es, el flujo magnético que atraviesa el interior de toda

curva cerrada que se mueve con el fluido se conserva, para explicar éste fenómeno de la ecuación $\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$ de MHD ideal ($\eta \rightarrow 0$), se plantea lo siguiente:

El flujo magnético a través de la superficie S en el instante t será: $\phi(S, t) = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Si tomo una curva C, solidaria con el fluido:



$$\phi(S', t + \Delta t) = \Delta t \iint_S d\vec{S} \cdot \partial_t \vec{B} + \iint_{S'} d\vec{S} \cdot \vec{B}$$

a primer orden. Por otro lado se tiene que :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_{Vol} \nabla \cdot \vec{B} dV = 0 \text{ pues } \nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ entonces: } 0 = \iint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} - \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{C \text{ lateral}} \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{V} \Delta t)$$

donde el signo menos viene de tomar la normal a S en el mismo sentido que la normal de S', en lugar de utilizar la normal exterior.

Utilizando la propiedad cíclica del producto mixto se tiene que :

$$\oint_{C \text{ lateral}} \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times \vec{V}) \Delta t = \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{V} \times \vec{B}) \Delta t \text{ y por lo tanto: } \iint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} - \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{V} \times \vec{B}) \Delta t \text{ y}$$

el desarrollo queda:

$$\phi(S', t + \Delta t) = \Delta t \iint_S d\vec{S} \cdot \partial_t \vec{B} + \underbrace{\iint_{S'} d\vec{S} \cdot \vec{B}}_{\phi(S, t)} - \oint_C d\vec{l} \cdot (\vec{V} \times \vec{B}) \Delta t \text{ y utilizando el teorema de Stockes :}$$

$$\iint_S \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) d\vec{S} = \oint_C (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \text{ con lo cual}$$

$$\text{queda: } \phi(S', t + \Delta t) - \phi(S, t) = \Delta t \left[\iint_S d\vec{S} \cdot \{ \partial_t \vec{B} - \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) \} \right] \text{ pero como } \partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})$$

entonces $\Delta \phi = 0$ para toda S.

Para $\eta \rightarrow 0$ pero no estrictamente nulo, hay que hacer la consideración adicional que si consideramos un elemento de plasma entre dos puntos $\vec{r}(t)$ y $\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) + \Delta \vec{r}(t)$,

desarrollando Taylor a primer orden de estas cantidades y con un poco de manejo algebraico obtendremos que: $\frac{d\Delta\vec{r}(t)}{dt} = (\Delta\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{V}$

Pero a partir de la ecuación de continuidad es posible obtener:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{B}}{\eta} \right) = \left[\left(\frac{\vec{B}}{\eta} \right) \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{V}$$

Y entonces si inicialmente se cumple que :

$$\Delta\vec{r}(t=0) \propto \vec{B}(t=0) \propto \frac{\vec{B}(t=0)}{\eta(t=0)}$$

es decir:

$$\Delta\vec{r}(t=0) = \varepsilon \frac{\vec{B}(t=0)}{\eta(t=0)} \text{ entonces ambos campos evolucionarán de la misma manera para todo}$$

$$\text{tiempo: } \Delta\vec{r}(t) = \varepsilon \frac{\vec{B}(t)}{\eta(t)}$$

con lo cual el flujo magnético se conserva y las curvas cerradas que atrapan flujo magnético son constantes de movimiento.

Invariantes ideales en MHD incompresible en 3 Dimensiones:

Con $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ y considerando condiciones de contorno periódicas o bien campos a cero en el infinito.

Si definimos normalizadas en unidades de $\rho=1$ las siguientes magnitudes:

$$E = \frac{1}{2} \int dx^3 (|\vec{V}|^2 + |\vec{B}|^2); \quad H = \frac{1}{2} \int dx^3 (\vec{A} \cdot \vec{B}); \quad K = \frac{1}{2} \int dx^3 (\vec{V} \cdot \vec{B}) \text{ que corresponden a la energía}$$

total (cinética + magnética), helicidad y helicidad cruzada respectivamente. Son invariantes ideales:

Primero la energía, se puede ver que es un invariante ideal, partiendo de :

$$(*) \quad \partial_t \vec{V} = -(\vec{V} \cdot \nabla)\vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{V} + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \text{ y de } (**) \quad \partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

ahora si integramos en volumen el producto escalar de la velocidad por la ecuación (*) mas el producto escalar del campo magnético por la ecuación (**)

Se obtiene tomando cada término por separado:

$$\int dx^3 \vec{V} \cdot \partial_t \vec{V} = \int dx^3 \frac{1}{2} \partial_t V^2 = \partial_t \text{Energía cinética}$$

$$\begin{aligned}
& - \int dx^3 \vec{V} \cdot \{(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}\} = \\
& = - \frac{1}{2} \int dx^3 \vec{V} \cdot \nabla |\vec{V}|^2 - \underbrace{\int dx^3 (\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})) \cdot \vec{V}}_{\vec{V} \perp (\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})) \text{ entonces da cero}} = - \underbrace{\int dx^3 \nabla \left(\frac{V^2}{2} \right)}_{\text{por teorema de la divergencia se pasa a int egral desup erfice y se anula por condiciones periódicas de contorno}} + \underbrace{\int dx^3 \left(\frac{V^2}{2} \nabla \cdot \vec{V} \right)}_{\nabla \cdot \vec{V} = 0 \text{ entonces se anula}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \int dx^3 \vec{V} \cdot \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) &= - \underbrace{\int dx^3 \nabla (\vec{V} p)}_{\text{por teorema de la divergencia se pasa a int egral desup erfice y se anula por condiciones periódicas de contorno.}} - \underbrace{\int dx^3 p (\nabla \cdot \vec{V})}_{\nabla \cdot \vec{V} = 0 \text{ entonces se anula}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int dx^3 v \vec{V} \nabla^2 \vec{V} &= - \int v \vec{V} (\nabla \times \vec{W}) - \underbrace{\int dx^3 v \vec{V} \nabla (\nabla \cdot \vec{V})}_{\nabla \cdot \vec{V} = 0 \text{ entonces se anula}} = - \int dx^3 v |\vec{W}|^2 - \underbrace{\int dx^3 v \nabla \cdot (\vec{W} \times \vec{V})}_{\text{por teorema de la divergencia se pasa a int egral desup erfice y se anula por condiciones periódicas de contorno.}}
\end{aligned}$$

donde $\vec{W} = \nabla \times \vec{V}$, ahora utilizando la propiedad cíclica del producto mixto:

$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$ se tiene:

$$\int dx^3 \vec{V} \cdot [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] = \int dx^3 (\nabla \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{V}) \text{ Además:}$$

$$\int dx^3 \vec{B} \partial_t \vec{B} = \int dx^3 \frac{1}{2} \partial_t B^2 = \partial_t \text{Energía magnética y además queda:}$$

$$\int dx^3 \eta \vec{B} \cdot \nabla^2 \vec{B} = - \int dx^3 \eta (\nabla \times \vec{B})^2 = - \int dx^3 \eta |\vec{j}|^2 \text{ usando que :}$$

$$\int dx^3 \eta \left[\underbrace{\vec{B} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{B})}_{\text{Se anula pues } \nabla \cdot \vec{B} = 0} - \vec{B} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \right] = - \eta \int dx^3 \left\{ \underbrace{\nabla \cdot [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}]}_{\text{por teorema de la divergencia se pasa a int egral desup erfice y se anula por condiciones periódicas de contorno.}} - (\nabla \times \vec{B})^2 \right\}$$

y por otra parte usando la identidad vectorial: $\nabla \cdot (\vec{D} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{D}) - \vec{D} \cdot (\nabla \times \vec{C})$ se obtiene

$$\text{que: } \int dx^3 \vec{B} \cdot [\nabla \times (\vec{V} \times \vec{B})] = - \int dx^3 \underbrace{\nabla \cdot [\vec{B} \times (\vec{V} \times \vec{B})]}_{\text{por teorema de la divergencia se pasa a int egral desup erfice y se anula por condiciones periódicas de contorno.}} + \int dx^3 (\vec{V} \times \vec{B}) \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

Ahora juntando todo queda:

$$\partial_t \text{Energía total} = \partial_t \text{Energía cinética} + \partial_t \text{Energía magnética} =$$

$$= \int dx^3 [(\nabla \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{V})] + \int dx^3 [(\nabla \times \vec{B}) \cdot (\vec{V} \times \vec{B})] - v \int dx^3 |\vec{W}|^2 - \eta \int dx^3 |\vec{j}|^2$$

pero como

$$\int dx^3 [(\nabla \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{V})] = - \int dx^3 [(\nabla \times \vec{B}) \cdot (\vec{V} \times \vec{B})] \text{ finalmente:}$$

$\partial_t \text{Energía total} = -v \int dx^3 |\vec{W}|^2 - \eta \int dx^3 |\vec{j}|^2$ y cuando $v = \eta = 0$ $\partial_t \text{Energía total} = 0$ y la Energía resulta un invariante ideal.

Para el caso de la Helicidad magnética H se parte de:

Tomar inversa del rotor a la ecuación (***) y teniendo en cuenta que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ se obtiene

$$\partial_t \vec{A} = (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{A} \text{ si ahora multiplico escalarmente ésta última por el campo magnético}$$

$$\vec{B} \cdot \partial_t \vec{A} = \vec{B} \cdot (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \vec{B} \cdot \nabla^2 \vec{A} \text{ multiplico por } \frac{1}{2} \text{ e integro en volumen queda :}$$

$$\int dx^3 \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \partial t \vec{A} = \frac{1}{2} \int dx^3 \partial t (\vec{B} \cdot \vec{A}) - \frac{1}{2} \int dx^3 \partial t \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ y utilizando que: } \partial t \vec{B} = \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}$$

$$\partial t \int dx^3 \left(\frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{2} \right) = \partial t H = \underbrace{\int dx^3 \frac{1}{2} \vec{B} \cdot (\vec{V} \times \vec{B})}_{\substack{\text{Se anula porque} \\ \vec{B} \perp (\vec{V} \times \vec{B})}} + \frac{\eta}{2} \int dx^3 \vec{B} \cdot \nabla^2 \vec{A} + \int dx^3 \frac{\vec{A}}{2} \cdot \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) + \int dx^3 \frac{\eta}{2} \vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{B}$$

$$\int dx^3 \frac{\vec{A}}{2} \cdot \nabla \times (\vec{V} \times \vec{B}) = \int dx^3 \frac{\vec{A}}{2} \cdot \nabla \times [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{A})] \text{ usando que } \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \text{ y la identidad :}$$

$\nabla \cdot (\vec{D} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\nabla \times \vec{D}) - \vec{D} \cdot (\nabla \times \vec{C})$ se obtiene:

$$\int dx^3 \frac{\vec{A}}{2} \cdot \nabla \times [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{A})] = \underbrace{\int \frac{dx^3}{2} \nabla \cdot [\vec{A} \times (\vec{V} \times (\nabla \times \vec{A}))]}_{\substack{\text{por teorema de la divergencia} \\ \text{se pasa a int egral de sup erficie} \\ \text{y se anula por condiciones} \\ \text{periódicas de contorno.}}} - \underbrace{\int \frac{dx^3}{2} [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{A})] \cdot (\nabla \times \vec{A})}_{\substack{\text{Se anula porque} \\ (\nabla \times \vec{A}) \perp [\vec{V} \times (\nabla \times \vec{A})]}} \text{ Entonces juntando}$$

$$\text{todo : } \partial t H = \eta \frac{\int dx^3 (\vec{A} \nabla^2 \vec{B} + \vec{B} \nabla^2 \vec{A})}{2} \text{ ahora bien:}$$

$$\eta \int dx^3 \vec{A} \nabla^2 \vec{B} = \int dx^3 \eta \left[\underbrace{\vec{A} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{B})}_{\text{Se anula pues } \nabla \cdot \vec{B} = 0} - \vec{A} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \right] = -\eta \int dx^3 \left\{ \underbrace{\nabla \cdot [(\nabla \times \vec{A}) \times \vec{B}]}_{\substack{\text{Se anula puesto que} \\ \nabla \times \vec{A} = \vec{B} \text{ y } \vec{B} \times \vec{B} = 0}} - (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B}) \right\}$$

y por otra parte

$$\eta \int dx^3 \vec{B} \nabla^2 \vec{A} = \int dx^3 \eta \left[\underbrace{\vec{B} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{A})}_{\substack{\text{Se anula si } \nabla \cdot \vec{A} = 0 \\ \text{entonces se elige} \\ \text{un gauge tal que} \\ \text{ésto sea así}}} - \vec{B} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \right] = -\eta \int dx^3 \left\{ \underbrace{\nabla \cdot [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{A}]}_{\substack{\text{por teorema de la divergencia} \\ \text{se pasa a int egral de sup erficie} \\ \text{y se anula por condiciones} \\ \text{periódicas de contorno.}}} - (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B}) \right\}$$

entonces puede escribirse: $\partial t H = -\eta \int dx^3 \vec{j} \cdot \vec{B}$ una vez normalizada la densidad de corriente de

forma tal que $\nabla \times \vec{B} = \vec{j}$.

Para el caso de la helicidad cruzada se puede probar también que

$$\frac{dK}{dt} = -(\eta + \nu) \int dV \frac{\vec{J} \cdot \vec{\omega}}{2} \text{ partiendo de integrar en volumen el producto escalar del campo}$$

magnético por la ecuación (*) mas el producto escalar de la velocidad por la ecuación (**) y procediendo de forma análoga a los casos anteriores.

Regímenes de relajación:

Cuando al sistema inicialmente turbulento se lo deja evolucionar sin forzarlo, puede relajarse un estado de **alineamiento dinámico** (estado de mínima energía a helicidad cruzada K aproximadamente constante, que da lugar a ondas de Alfvén)

Realizando un tratamiento variacional es posible ver que esto es así:

$$\delta E - \lambda \delta K = 0$$

$$\int dx^3 \left[\vec{u} \delta \vec{u} + \vec{B} \delta \vec{B} - \frac{\lambda}{2} (\delta \vec{u} \cdot \vec{B} + \delta \vec{B} \cdot \vec{u}) \right] = 0 \text{ y agrupando se obtiene que:}$$

$$\int dx^3 \left[\delta \vec{u} \cdot \left(\vec{u} - \frac{\lambda}{2} \vec{B} \right) + \delta \vec{B} \cdot \left(\vec{B} - \frac{\lambda}{2} \vec{u} \right) \right] = 0 \text{ y como las variaciones de } \delta \vec{u} \text{ y } \delta \vec{B} \text{ son}$$

independientes entonces los paréntesis deben anularse y queda:

$$\vec{u} = \frac{\lambda}{2} \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\lambda}{2} \vec{u}$$

con $\lambda/2 = \pm 1$ por lo tanto habrá dos posibles tipos de equilibrios dinámicos $\vec{u} = \pm \vec{B}$ o estados de Alfvén (ondas transversales que se propagan en las líneas de campo magnético como si fueran cuerdas elásticas)

Otro posible régimen de relajación es el **decaimiento selectivo** (estado de mínima energía a Helicidad magnética constante si la velocidad y el campo magnético están suficientemente descorrelacionados)

Por el método variacional de *multiplicadores de Lagrange* puede verse que en el caso de **un decaimiento selectivo** esto es así:

$$\delta E - \mu \delta H = 0$$

$$\int dx^3 [\vec{u} \delta \vec{u} + \vec{B} \delta \vec{B} - \mu \delta \vec{A} \cdot \vec{B} - \mu \delta \vec{B} \cdot \vec{A}] = 0 \text{ que puede escribirse como:}$$

$$\int dx^3 [\vec{u} \delta \vec{u} + \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \vec{B}) + (\nabla \times \vec{B}) \cdot \delta \vec{A} - 2\mu \vec{B} \cdot \delta \vec{A} - \mu \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \vec{A})]$$

$$\text{ya que } \delta \vec{B} = \nabla \times \delta \vec{A} \text{ y a su vez: } \int \vec{B} \cdot \delta \vec{B} dx^3 = \int \vec{B} \cdot \nabla \times \delta \vec{A} dx^3 = \int \delta \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} dx^3 + \int \nabla \cdot (\delta \vec{A} \times \vec{B}) dx^3$$

con lo cual utilizando el teorema de la divergencia la integral en volumen de los términos con divergencias pueden escribirse como una integral en la superficie que contiene al volumen y queda:

$$\oint_{S(V)} ds \hat{n} \cdot [\delta \vec{A} \times \vec{B} - \mu \delta \vec{A} \times \vec{A}] + \int_V dx^3 (\vec{u} \delta \vec{u} + [\nabla \times \vec{B} - 2\mu \vec{B}] \cdot \delta \vec{A}) = 0$$

Si se suponen paredes perfectamente conductoras y campos tendiendo a cero en el infinito se llega a la condición "libre de fuerzas lineales" $\nabla \times \vec{B} = 2\mu \vec{B}$,

Taylor (1974) conjeturó que en un magneto-fluido con baja resistividad, confinado a un volumen rodeado por paredes perfectamente conductoras, H puede ser considerado constante.

Por lo tanto el sistema relajará a una configuración meta-estable ($\alpha = 2\mu$) tal que $\nabla \times \vec{B} = \alpha \vec{B}$ que es el estado de mínima energía a $H = cte$ de acuerdo a **teorema de Woltjer** cuando la resistividad es exactamente nula (ver por ejemplo Biskamp, 1997).

Ahora utilizando la hipótesis de plasma perfectamente conductor, es decir resistividad prácticamente nula, de tal forma que el campo magnético queda "congelado" dentro del plasma, entonces las perturbaciones del potencial vector pueden expresarse como: $\delta \vec{A} = \delta \vec{\xi} \times \vec{B}$ donde $\delta \vec{\xi}$ representa el desplazamiento del plasma durante la perturbación. Asumiendo que S es fija y si pedimos que las componentes normales de \vec{B} sean cero sobre la superficie (paredes perfectamente conductoras), entonces es claro que $\delta \vec{A}$ es paralela a \hat{n} , y la integral de superficie se hace cero.

Puesto que $\delta \vec{u}$ y $\delta \vec{A}$ son independientes entonces debe ser $\vec{u} = 0$ y $\nabla \times \vec{B} - 2\mu \vec{B} = 0$.

Ejemplos de sistemas físicos en regímenes de relajación turbulenta:

Puesto que el viento solar es un medio turbulento, es factible el estudio de estructuras como las nubes magnéticas en el viento solar en el marco de turbulencia MHD, siendo entidades que acarrean helicidad magnética desde su origen solar, la cascada inversa de helicidad magnética tendería a la auto-organización del plasma en estructuras grandes de este tipo que acumulan helicidad magnética; estas estructuras son posibles casos de relajación del sistema a estados meta-estables libres de fuerza, en condiciones más o menos cercanas a las que indica la teoría.

En el marco de MHD ideal cuando el término de inercia en la ecuación de Navier-Stokes puede ser despreciado comparado con la tensión magnética y la presión magnética y de plasma, no existe fuerza neta aplicada en ningún elemento de fluido. Las nubes magnéticas son objetos astrofísicos a los cuales puede aplicarse este enfoque cuando son descriptos *en el sistema de referencia del viento solar*. Entonces su configuración magnética resultará de la solución de

$\vec{J} \times \vec{B} / c - \nabla p = 0$ Donde c es la velocidad de la luz, $\vec{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{B}$ es la corriente eléctrica y p es la presión total del plasma.

Cuando la presión de plasma es despreciable comparada con la presión magnética, la configuración se llama “*libre de fuerza*”, debido a que la auto-fuerza del campo magnético es cero ya que la presión magnética es balanceada por la tensión de las líneas magnéticas curvadas.

$$\nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) = (\vec{B} \cdot \nabla) \frac{\vec{B}}{4\pi}$$

Tratándose las nubes magnéticas de estructuras, que debido al *congelado de las líneas de campo*, se llevan consigo helicidad magnética desde su origen coronal, es una hipótesis razonable suponer que estos sistemas si no son forzados relajen según la *conjetura de Taylor* a configuraciones *libres de fuerza lineal*, puesto que la helicidad magnética prácticamente se conserva o se disipa poco o por lo menos más lentamente que la energía.

Se ejemplifica con dos nubes magnéticas interplanetarias ubicadas a 1 UA:

De la lista publicada en :[http://www.lepmfi.gsfc.nasa.gov/mfi/mag_cloud_publ.html],

| <i>Evento</i> | <i>Comienzo</i> | <i>Fin</i> |
|---------------|----------------------|----------------------|
| A | 22-Aug-1995 22:00:00 | 23-Aug-1995 19:00:00 |
| B | 15-Jul-1997 06:00:00 | 16-Jul-1997 01:00:00 |

De acuerdo a [Burlaga, 1981;Burlaga1995] las nubes magnéticas son la manifestación interplanetaria de eyecciones de masa coronal CMES y presentan las siguientes características:

- Aumento de la intensidad del campo magnético interno respecto del medio que la rodea
- Notable rotación coherente del vector campo magnético
- La temperatura de protones en la nube es menor que las típicas del viento solar
- Las tres características deben observarse para que las estructuras sean consideradas NMs.

Se analizaron los datos de las series temporales del campo magnético interplanetario obtenidos por la sonda espacial WIND con cadencia temporal de 3 segundos.

Procedimiento realizado para el estudio de estas nubes magnéticas:

Se suavizaron los datos de las series temporales mediante una interpolación lineal de manera de tener 100 datos de la serie temporal del campo para cada nube, para filtrar variaciones de escala pequeña y focalizar el estudio en las variaciones globales, como puede observarse en la Figura 1 para el evento del 22 de Agosto de 1995.

Aplicando el método de varianza mínima a las series temporales de las componentes del campo magnético, como se discute en el apéndice de Bothmer & Schwenn (1994), se obtiene la orientación de la nube magnética.

Luego teniendo en cuenta la orientación obtenida para el eje de la nube, se rotan las componentes GSE (Geocentric Solar Ecliptic) del campo, obteniendo las nuevas componentes

en las coordenadas de la nube, B_{xnube} , B_{ynube} , B_{znube} , según puede verse en la Figura 2 para el mismo evento de la Figura 1.

Como el satélite solo recorre un corte en una dimensión de la nube, se utilizó el modelo libre de fuerzas lineal para reconstruir la estructura tridimensional de las mismas.

Para modelar estas nubes magnéticas se utilizó el modelo estudiado por Lundquist (1950) asumiendo simetría cilíndrica. Luego se han ajustado los parámetros libres de los modelos (B_0 y τ_0) con la rutina estándar de ajuste de cuadrados mínimos no lineal de Levenberg-Marquard (Press et al., 1992). Y se han reconstruido las componentes del campo de acuerdo al modelo utilizado, como se observa en las Figuras 3,4 para el evento del 22 de Agosto de 1995 y en las Figuras 5 y 6 para el evento del 15 de Julio de 1997.

Modelo utilizado:

Campo libre de fuerza lineal (Modelo de Lundquist)

El campo magnético estático de una configuración libre de fuerzas lineal queda descrito por la ec (1): $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$

La solución de esta ecuación para una configuración con simetría axial fue obtenida por Lundquist [1950]. El caso α constante es de particular importancia ya que corresponde a un estado de preferencia al cual el plasma tiende a relajar según lo expuesto anteriormente y además existen soluciones analíticas exactas.

Tomando la divergencia de la ecuación (1) se obtiene la condición de que α es constante a lo largo de las líneas de campo.

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0 \quad (2)$$

y tomando el rotor de la ecuación (1) para α constante se obtienen las siguientes ecuaciones equivalentes:

$$(\nabla^2 + \alpha^2)\mathbf{B} = 0, \quad \text{con} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

Para una configuración magnética de tipo helicoidal suponiendo $B_z \propto \cos(m\varphi + kz)$ la componente z de la ecuación (3) resulta [ver Biskamp, 1997]:

$$\left(\partial_{rr} + \frac{1}{r} \partial_r + \chi^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) B_z = 0, \quad \chi^2 = \alpha^2 - k^2 \quad (4)$$

La cual tiene solución :

$$B_z^{m,k} = J_m(\chi r) \cos(m\varphi + kz) \quad (5)$$

Las componentes r y φ de la ecuación (3) resultan:

$$\mathbf{B}_r^{m,k} = -\left[\frac{k}{\chi} J'_m(\chi r) + \frac{m\alpha}{r\chi^2} J_m(\chi r)\right] \text{sen}(m\varphi + kz) \quad (6)$$

$$\mathbf{B}_\varphi^{m,k} = -\left[\frac{k}{\chi} J'_m(\chi r) + \frac{m\alpha}{r\chi^2} J_m(\chi r)\right] \text{cos}(m\varphi + kz) \quad (7)$$

Debido a la linealidad de la ecuación (3) la solución general es una superposición lineal de $\mathbf{B}^{m,k}$.

$$\mathbf{B} = \sum_{m,k} a_{m,k} \mathbf{B}^{m,k} \quad (8)$$

En el caso particular de un sistema con simetría cilíndrica $m=k=0$ y la solución de (6), (7) y (8) es:

$$B_z = A J_0(\alpha r), \quad B_r = 0, \quad B_\varphi = C J_1(\alpha r)$$

Donde A y C son constantes que dependen de las condiciones de contorno de las respectivas componentes del campo. Esta solución resulta consistente con mediciones *in situ* del campo magnético en tubos de flujo interplanetarios a 1 AU, como ha sido estudiado por varios autores [por ejemplo, Burlaga et al., 1981; Burlaga, 1988; Lepping et al., 1990]. Luego el campo podrá modelarse como:

$$\mathbf{B} = B_0 J_1(\alpha r) \boldsymbol{\varphi} + B_0 J_0(\alpha r) \mathbf{z} \quad (9)$$

donde J_n es la función de Bessel de primera clase de orden n , B_0 es la intensidad del campo y α es una constante que mide el apartamiento de la configuración del campo magnético potencial.

La torsión de las líneas de campo magnético por unidad de longitud, $\tau = d\varphi/dz = B_\varphi/(rB_z)$ es:

$$\tau(r) = \frac{J_1(\alpha r)}{r J_0(\alpha r)} \quad (10)$$

la constante α determina la torsión en el eje de la nube magnética $\tau_0 = \tau(0) = \alpha/2$.

En éste modelo :

$$A = B/\alpha \quad (11)$$

La solución de Lundquist extendiéndose desde $r=0$ hasta el primer cero de J_0 , es generalmente suficiente para describir la sección de la nube magnética observada por una sonda

[por ejemplo, Burlaga et al. 1981; Burlaga, 1988; Lepping et al.,1990], sin embargo existen algunas nubes que parecen ser mejor descritas usando la solución de Lundquist mas allá del primer cero de J_0 como mostraron Vandas y Geranios [Vandas y Geranios, 2001].

La helicidad relativa por unidad de longitud que se obtiene para éste modelo teniendo en cuenta que el campo magnético viene dado por la ec. (9) y el potencial vector por (11)

$$H_r / L = 4\pi \int_0^R A_\varphi B_\varphi r dr \quad (12)$$

la integral a resolver es:

$$\frac{H_r}{L} = \frac{4\pi B_0^2}{\alpha} \int_0^R J_1^2(\alpha r) r dr = \left(\frac{8\pi}{(2R\tau_0)^4} \int_0^{2R\tau_0} J_1^2(u) u du \right) B_0^2 R^4 \tau_0 \quad (13)$$

donde $u = 2R\tau_0$ es una cantidad adimensional y llevando a cabo la integración queda:

$$\frac{H_r}{L} = \frac{\pi B_0^2 R^2}{\tau_0} \left[J_0^2(2R\tau_0) + J_1^2(2R\tau_0) - \frac{J_0(2R\tau_0)J_1(2R\tau_0)}{R\tau_0} \right] \quad (14)$$

El flujo F_z está dado por :

$$F_z = \frac{2\pi B_0}{\alpha^2} \int_0^{\alpha R} x J_0(x) dx = \frac{2\pi B_0}{\alpha^2} [J_1(\alpha R) - J_1(0)] \quad (15)$$

El resultado en términos de τ_0 es:

$$F_z = [\pi B_0 R J_1(2R\tau_0)] / \tau_0 \quad (16)$$

El flujo F_φ resulta:

$$F_\varphi = \frac{LB_0}{\alpha} \int_0^{\alpha R} J_1(x) dx = \frac{LB_0}{\alpha} [J_0(0) - J_0(\alpha R)] \quad (17)$$

Quedando en términos de τ_0 :

$$F_\varphi = \frac{B_0}{2\tau_0} [1 - J_0(2R\tau_0)] L \quad (18)$$

La energía magnética ME/L que se obtiene resulta:

$$\frac{ME}{L} = \frac{B_0^2 R^2}{4} \left[J_0^2(2R\tau_0) + J_1^2(2R\tau_0) - \frac{J_0(2R\tau_0)J_1(2R\tau_0)}{2R\tau_0} \right] \quad (19)$$

Se suavizan los datos de las series temporales realizando una interpolación lineal de manera de tener 100 datos de la cadencia temporal como puede observarse en la Figura 1.

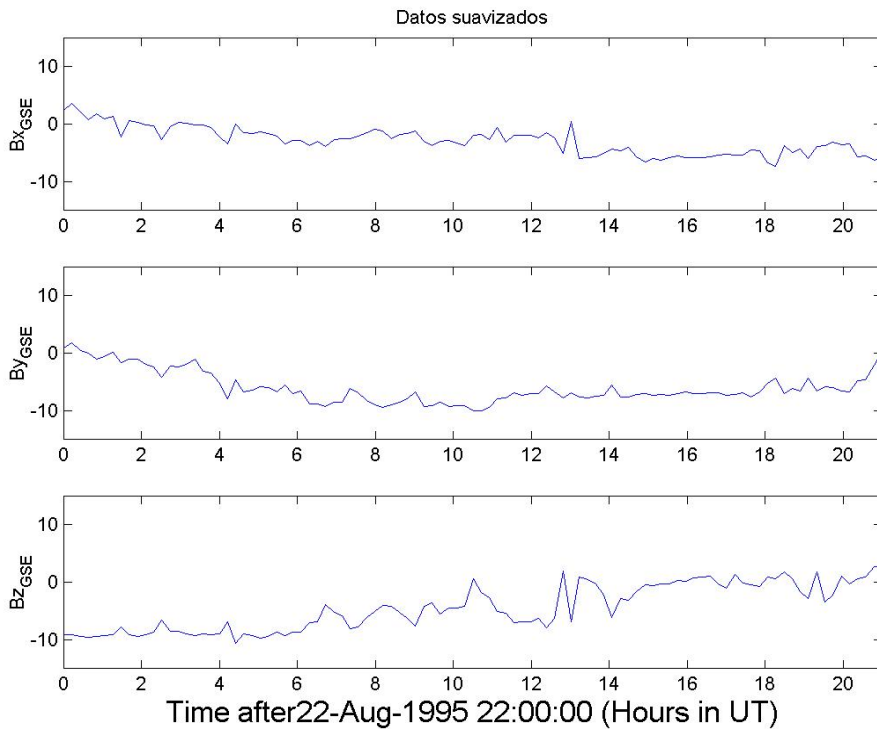


Figura 1: Datos suavizados de la serie temporal del campo magnético (nT) para el evento del 22 de Agosto de 1995 en el sistema GSE tal que se toman 100 puntos en todo el evento.

Aplicando el método de varianza mínima a las series temporales de las componentes del campo magnético dentro de la nube se obtiene la orientación de la nube magnética.

Las orientaciones se dan mediante los ángulos θ (ángulo entre el plano de la eclíptica y el eje de la nube) y el otro ángulo que determina la orientación de la nube respecto del sistema GSE es φ (el ángulo entre la dirección del versor unidad X_{GSE} y la proyección del eje de la nube sobre el plano de la eclíptica medido en dirección antihoraria). De la velocidad media del plasma interplanetario y de la orientación del eje de la nube, se estima el radio de la nube como puede observarse en la Tabla 1

| Evento | θ(Grados) | φ(Grados) | Radio ($10^2 UA$) |
|---------------|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| A | -22,7 | 271,2 | 9,1 |
| B | -63,8 | 124,6 | 8,2 |

Tabla .1: Lista de los valores de θ , φ , R , obtenidos por el método de Varianza Mínima.

Luego realizando la rotación se obtienen las componentes del campo magnético observado en las coordenadas de la nube. $B_{x\ nube}$, $B_{y\ nube}$, $B_{z\ nube}$ según se observa en la Figura2.

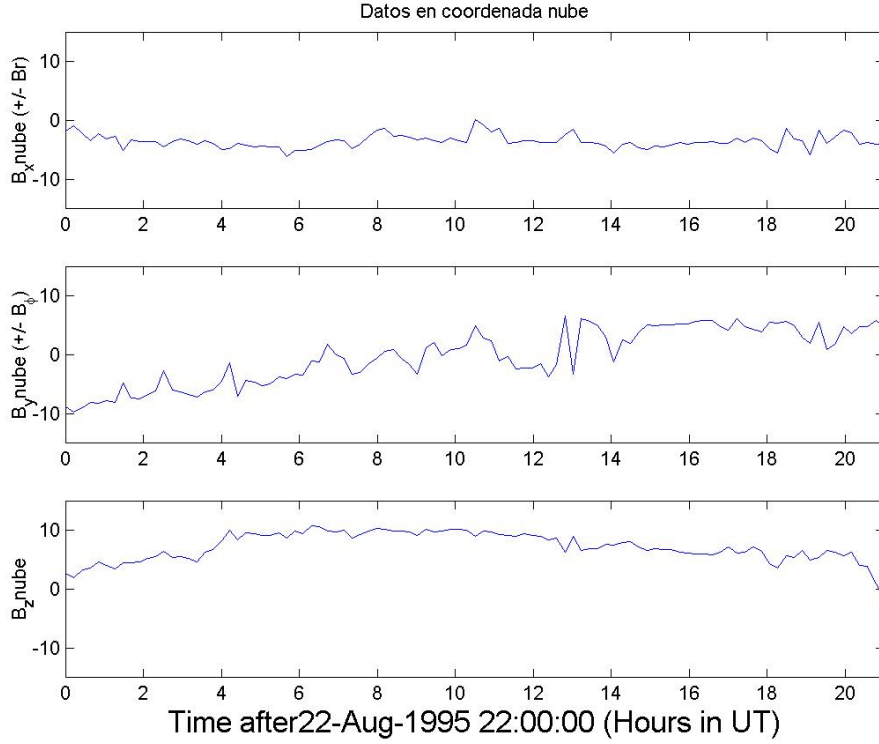


Figura 2: Datos de la serie temporal del campo magnético (nT) para el evento del 22 de Agosto de 1995 una vez suavizados y presentados en las coordenadas locales de la nube.

También se asocia el tiempo de observación con la distancia correspondiente del satélite al eje de la nube, obteniéndose entonces el campo magnético dentro de la nube en función del radio $B_{obs}(r)$. Se define una función residual χ^2 calculando la diferencia entre \mathbf{B}_{obs} y \mathbf{B}_{modelo} para el modelo de Lundquist:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\left(B_{x\ obs}^i - B_{x\ modelo}^i \right)^2 + \left(B_{y\ obs}^i - B_{y\ modelo}^i \right)^2 + \left(B_{z\ obs}^i - B_{z\ modelo}^i \right)^2 \right)$$

el supraíndice i indica el tiempo de observación y N es la cantidad total de datos de campo magnético observados.

Para estimar la calidad del ajuste se consideró el valor de χ^2 evaluado en los parámetros ya ajustados para cada evento.

Con estos parámetros se reconstruye las componentes del campo magnético según el modelo como puede observarse en las Figuras 3, 4, 5 y 6. Estas nubes pueden considerarse como un posible ejemplo de relajación turbulenta MHD del tipo decaimiento selectivo.

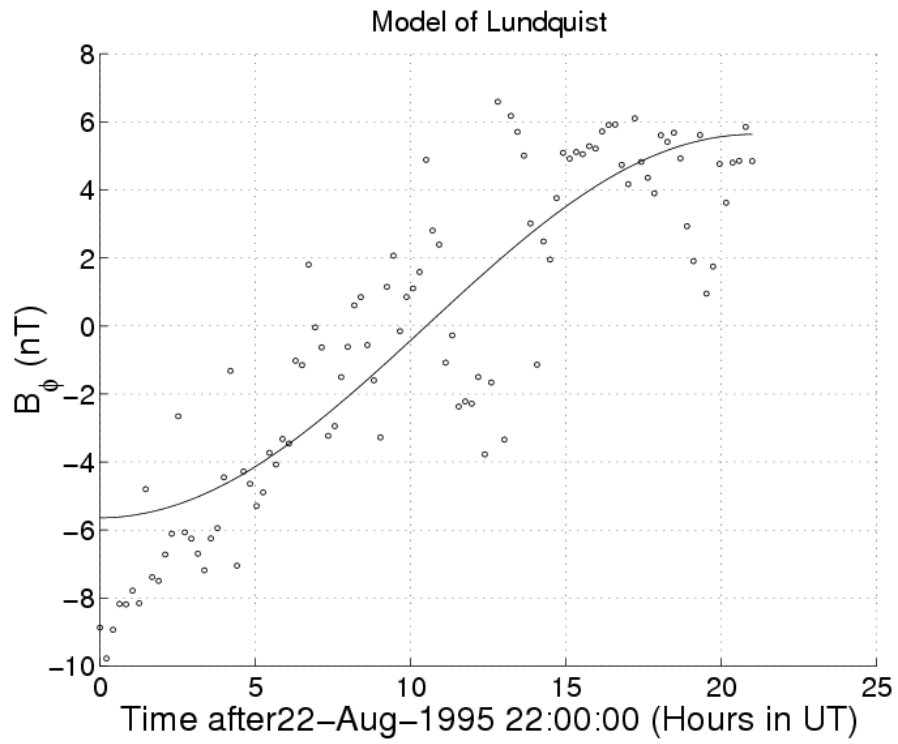


Figura 3: Componente $B_{\phi \text{ nube}}$ del campo magnético (nT) para el evento del 22 de Agosto de 1995. Los círculos muestran el campo observado. La línea llena corresponde al modelo de Lundquist.

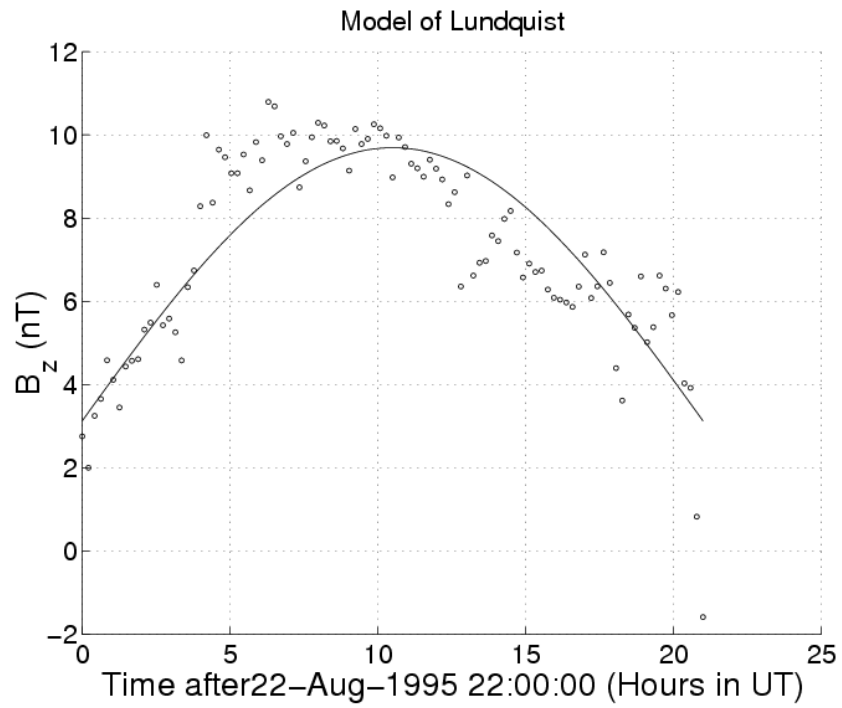


Figura 4: Componente $B_{z\text{ nube}}$ del campo magnético (nT) para el evento del 22 de Agosto de 1995. Los círculos muestran el campo observado. La línea llena corresponde al modelo de Lundquist.

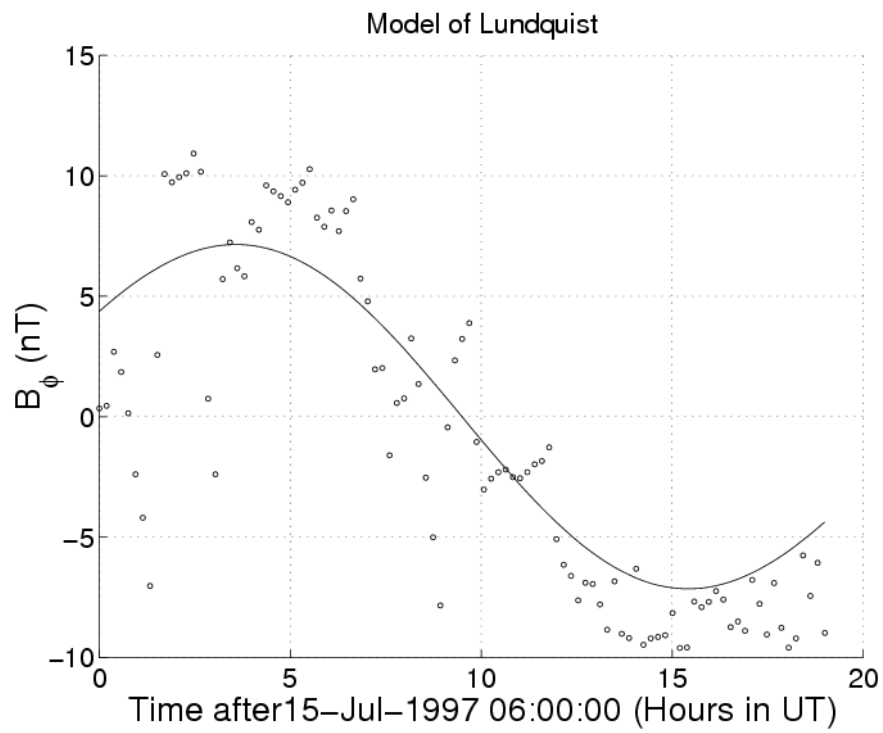


Figura 5: Componente B_{ϕ} *nube* del campo magnético (nT) para el evento del 15 de Julio de 1997. Los círculos muestran el campo observado. La línea llena corresponde al modelo de Lundquist.

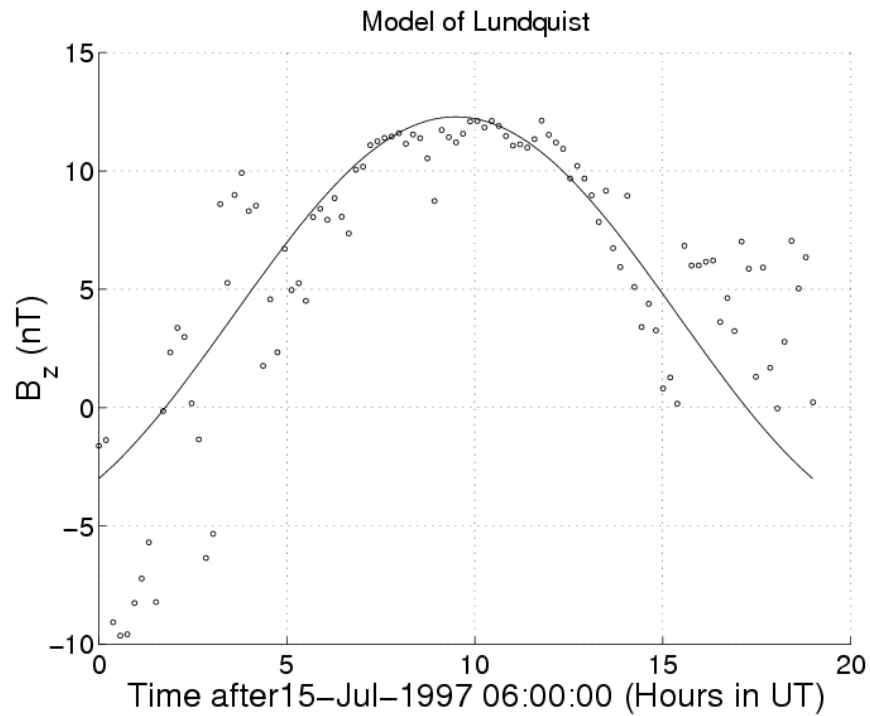


Figura 6: Componente B_z nube del campo magnético (nT) para el evento del 15 de Julio de 1997. Los círculos muestran el campo observado. La línea llena corresponde al modelo de Lundquist.

Figura 7: Calidad del ajuste calculada para las dos nubes magnéticas estudiadas. El rombo, el triángulo, los asteriscos y los signos + corresponden a los modelos de Lundquist, de Gold-Hoyle, de Hidalgo et al. y de Cid et al., respectivamente.

En la Figura 7 pueden observarse los valores para la calidad del ajuste, se señalan dentro de la figura los símbolos que corresponden a los distintos modelos para los dos eventos, se observa que el modelo libre de fuerzas lineal provee el mejor ajuste en ambos casos.

Referencias:

- Apuntes del curso introductorio a la física del plasma dictado por el Dr. J. I. Castro en el transcurso de EL LEONCITO SCHOOL OF SOLAR PHYSICS. San Juan (28 Nov al 5 dic. 2005)
- Biskamp, D., Nonlinear Magnetohydrodynamics, Nonlinear Magnetohydrodynamics, Cambridge University Press., 1997.
- Bothmer, V., and R. Schwenn, Eruptive prominences as sources of magnetic clouds in the solar wind, Space Science Reviews,70, 215-220, 1994.
- Burlaga, L., Sittler, E., Mariani, F., and Schwenn, R. Magnetic loop behind an interplanetary shock - Voyager, Helios, and IMP 8 observations, Journal of Geophysical Research 86, 6673-6684, 1981.
- Burlaga, L. F., Interplanetary Magnetohydrodynamics, New York, Oxford University Press, 1995.
- Pouquet, A., On two dimensional magnetohydrodynamic turbulence, J. Fluid. Mech, 88, 1-16, 1978.
- Pouquet, A., Frisch U. & Léorat J., Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect, J. Fluid. Mech, 77, 321-54, 1976.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, Numerical Recipes, Cambridge University Press, 1992.
- Lundquist, S., Magnetohydrostatic fields. Ark. Fys. 2, 361-365. 1950
- Taylor, J. B., Relaxation of toroidal plasma and generation of reverse magnetic field, Phys. Rev. Lett., 33, 1139, 1974.

Agradecimientos

Agradezco la hospitalidad recibida durante el 3rd EL LEONCITO SCHOOL OF SOLAR PHYSICS. San Juan (28 Nov al 5 dic. 2005)